ВІДПОВІДІ та РОЗВ'ЯЗАННЯ
завдань обласного теоретичного туру олімпіади юних фізиків
2014–2015 навчальний рік

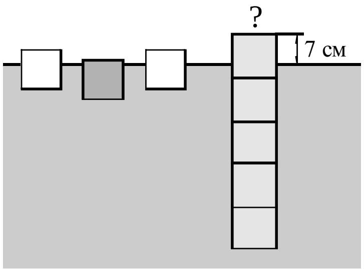


Рис. 1

Задача 10.1. Белые и серые кубики имеют одинаковые размеры 10×10×10 см. Белый кубик плавает в воде, погрузившись на 8 см, серый – на 9 см. Из пяти кубиков собирают «столбик», который плавает в воде, возвышаясь над поверхностью на 7 см (рис. 1). Сколько белых кубиков в этой конструкции?

Решение

Пусть в «конструкции» k белых и $(5-k)$ серых кубиков.

При любом соединении кубиков сохраняется (является инвариантом) «подводный объем».

Запишем эту сохраняющуюся величину для отдельных кубиков и для конструкции:

$$\text{inv} = \text{"}\textit{подводный объем}\text{"}$$

$$k \cdot S \cdot h_б + (5-к) \cdot S \cdot h_с = 5 \cdot S \cdot h_0 - S \cdot \Delta h$$

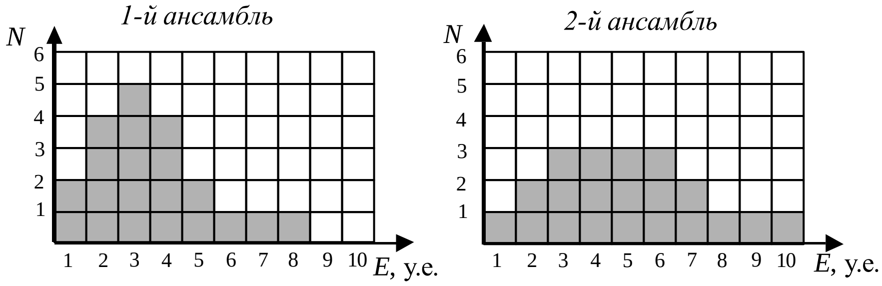
$$k \cdot 8\ \textit{см} + (5-к) \cdot 9\ \textit{см} = 5 \cdot 10\ \textit{см} - 7\ \textit{см}$$

$$45 - k = 43$$

Отсюда получаем ответ $k = 2$, т.е. в «конструкции» два белых кубика и 3 серых кубика.

Ответ: в «конструкции» два белых кубика и 3 серых кубика.

Задача 11.2. На рисунках 1, *а, б* приводятся две гистограммы распределений атомов одноатомного газа по энергиям. Первая гистограмма показывает, какое количество атомов в первом ансамбле обладает кинетической энергией равной E_0, $2E_0$, $3E_0$, …(E_0 - условная единица измерения энергии). Вторая гистограмма дает аналогичную информацию для атомов второго ансамбля.



а) *б)*

Рис. 1

1) Сколько атомов в каждом ансамбле? 2) Чему равна средняя (арифметическая) кинетическая энергия атомов каждого ансамбля? 3) Во сколько раз отличаются абсолютные температуры ансамблей?

Решение.

1) В каждом ансамбле 20 атомов.

2) Полная кинетическая энергия первого ансамбля равна

$$E_{общ\,1} = 2 \cdot E_0 + 4 \cdot 2E_0 + 5 \cdot 3E_0 + 4 \cdot 4E_0 + 2 \cdot 5E_0 + 1 \cdot 6E_0 + 1 \cdot 7E_0 + 1 \cdot 8E_0 = 72E_0.$$

Полная кинетическая энергия атомов второго ансамбля равна:

$$E_{общ\,2} = 1 \cdot E_0 + 2 \cdot 2E_0 + 3 \cdot 3E_0 + 3 \cdot 4E_0 + 3 \cdot 5E_0 + 3 \cdot 6E_0 + 2 \cdot 7E_0 + 1 \cdot 8E_0 + 1 \cdot 9E_0 + 1 \cdot 10E_0 = 100E_0.$$

Поэтому среднее (арифметическое) значение кинетической энергии для атомов первого ансамбля равно $\left\langle E_{k\,1} \right\rangle = E_{общ\,1} / N = 3{,}6E_0$. Для второго ансамбля - $\left\langle E_{k\,2} \right\rangle = E_{общ\,2} / N = 5{,}0E_0$.

3) Абсолютная температура есть мера средней кинетической энергии атомов и молекул - $\left\langle E_k \right\rangle = \dfrac{3}{2}kT$. Отсюда получаем $T_2 / T_1 = \left\langle E_{k\,2} \right\rangle / \left\langle E_{k\,1} \right\rangle = 1{,}4$.

Ответ: 1) в каждом ансамбле 20 атомов; 2) $\left\langle E_{k\,1} \right\rangle = 3{,}6E_0$, $\left\langle E_{k\,2} \right\rangle = 5{,}0E_0$; 3) $T_2 / T_1 = \left\langle E_{k\,2} \right\rangle / \left\langle E_{k\,1} \right\rangle = 1{,}4$

Задача 11.3. Турист находится на расстоянии 1,5 км от дороги (от точки O). Расстояние от точки O до турбазы равно 2,715 км. Под каким углом туристу следует выходить из леса на дорогу, чтобы дойти до турбазы как можно быстрее? Какое минимальное время ему для этого понадобится?

Скорость движения туриста по лесу составляет 0,5 м/с, а по дороге – 1,3 м/с?

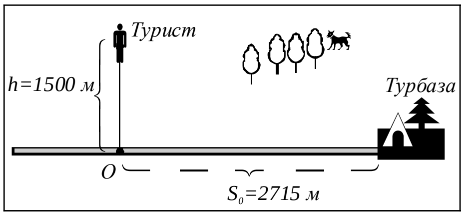
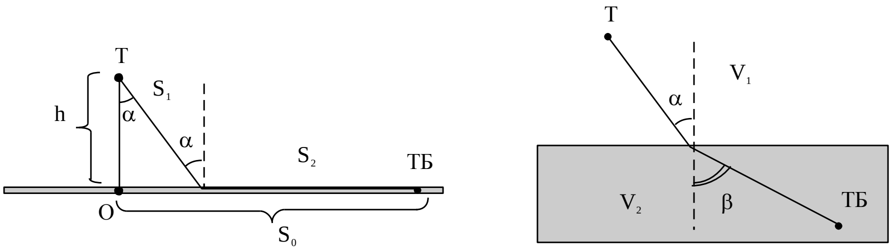


Рис.1

Решение. Чтобы *увидеть* ответ, немного изменим «декорации» (рис.2б). Скажем, что над дорогой находится среда, скорость туриста в которой равна $V_1 = 0{,}5\,м/с$, а ниже дороги вторая среда, скорость движения в которой равна $V_2 = 1{,}3\,м/с$. И еще сдвинем немного вниз турбазу, чтобы наши намеки стали более ясными.



а) *б)*

Рис.2

Если турист найдет самый быстрый путь, то он с необходимостью повторит путь луча света, потому, что согласно принципу Ферма, свет всегда выбирает путь, требующий минимального времени! А как ведет себя луч света на границе двух сред хорошо известно – он всегда выполняет закон о преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{V_1}{V_2}.$$

В нашем случае $\beta = 90°$ (аналог полного внутреннего отражения), и для оптимального угла выхода туриста из леса получаем:

$$\sin\alpha = \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{13} \qquad \text{(Отметим, что } \cos\alpha = \frac{12}{13},\ tg\alpha = \frac{5}{12}\text{)}.$$

Теперь рассчитываем время движения.

Для первой среды получаем:

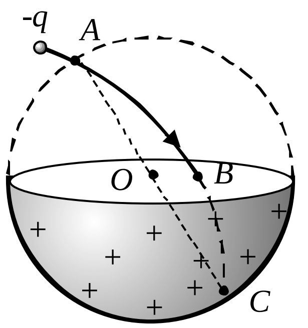
$$S_1 = h/\cos\alpha = 1625м,\ \ t_1 = S_1/V_1 = \frac{h_1}{V_1\cos\alpha} = 3250 \text{ с.}$$

Для второй среды получаем:

$$S_2 = S_0 - \frac{h\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2090 \text{ м},\ \ t_2 = \frac{S_2}{V_2} = \frac{1}{V_2}\left(S_0 - \frac{h\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 1608\ с.$$

Итого, $t = t_1 + t_2 = 4858$ с.

Ответ: 1) $\alpha = \arcsin\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) = 23°$, 2) t = 4858 с.



Задача 11.4. Отрицательно заряженная частица, двигаясь под действием притяжения равномерно заряженной полусферы (рис. 1), последовательно проходит точки А, В и С. (Точки А и С расположены симметрично относительно точки О, центра краевой окружности полусферы).

В точке А скорость частицы была равна $V_1 = 2 \cdot 10^5$ *м / с*, в точке В - $V_2 = 3 \cdot 10^5$ *м / с*. Чему будет равна скорость частицы в точке С?

Сила сопротивления воздуха и сила тяжести отсутствуют.

Рис. 1

Решение.

Закон сохранения энергии дает для перехода частицы из точки А в точку В и для перехода из точки В в точку С:

$$\begin{cases} \dfrac{mV_2^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + |q| \cdot (\varphi_B - \varphi_A) \\ \dfrac{mV_3^2}{2} = \dfrac{mV_2^2}{2} + |q| \cdot (\varphi_C - \varphi_B) \end{cases} . \qquad (1)$$

Чтобы получить ответ нам надо выяснить, как устроено электрическое поле равномерно заряженной полусферы, а именно, как связаны потенциалы точек A, B и C.

Рассмотрим вместе с нашей полусферой точно такую же перевернутую полусферу (рис. 2). (На каждой полусфере мы указали еще одну дополнительную точку D, симметричную точки B. Понятно, что $\varphi_D = \varphi_B$.)

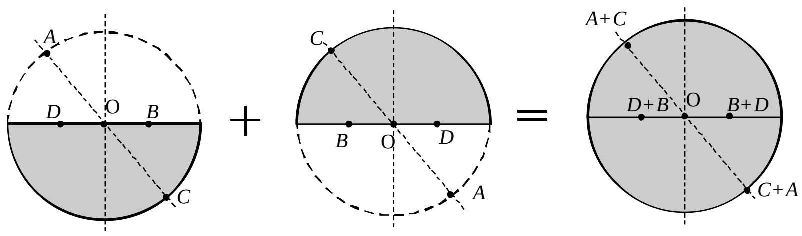


Рис. 2

Сложив две полусферы вместе, мы получим равномерную заряженную сферу. А для равномерно заряженной сферы известно, что потенциал всех внутренних точек одинаков и равен потенциалу поверхности сферы. Поэтому, используя принцип суперпозиции, получаем:

1) $\varphi_D + \varphi_B = \varphi_0 \rightarrow \varphi_B = \varphi_0 / 2$;

2) $\varphi_A + \varphi_C = \varphi_0$.

Отсда получаем, что равность потенциалов между парами точек B-A и B- C одинакова:

$$\varphi_A + \varphi_C = \varphi_0 \quad \rightarrow \quad \varphi_C - \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\varphi_0}{2} - \varphi_A \quad \rightarrow \quad \varphi_C - \varphi_B = \varphi_B - \varphi_A .$$

Поэтому, складывая два уравнения (1), получаем окончательный ответ:

$$V_3 = \sqrt{2V_2^2 - V_1^2} = 3{,}74 \cdot 10^5 \text{ м / с}.$$

Ответ: $V_3 = \sqrt{2V_2^2 - V_1^2} = 3{,}74 \cdot 10^5$ *м / с*.

Задача 10.5. На рисунке 1 приводится график зависимости длительности светового дня $\tau(t)$ от времени года (для широты г. Запорожья). В день весеннего равноденствия (22 марта) длительность дня равна 12 часам. В дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) длительность дня достигает максимального и минимального значения (16 часов и 8 часов, соответственно).

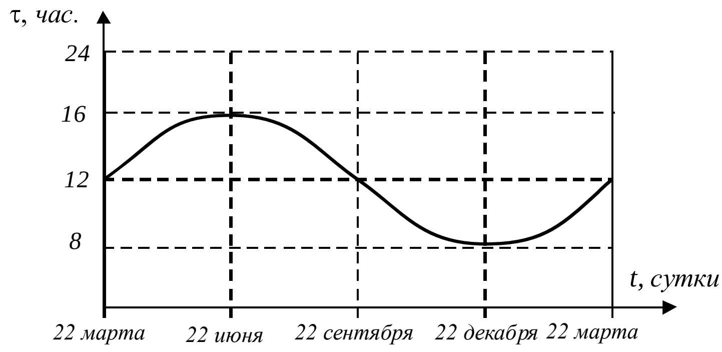


Рис. 1

1) Считая, что приведенный график является «приподнятой синусоидой», найти *скорость приращения длительности дня* и вычислить с ее помощью максимальное *приращение длительности дня за одни сутки*.

2) В этом же приближении найти чему равно максимальное приращение длительности дня за сутки для областей, лежащих на Полярном круге.

Примечание: Полярный круг – такая широта, на которой Солнце один раз в год не заходит и один раз в год не восходит.

Решение.

Период «приподнятой синусоиды» равен $T = 1\,год = 365\,суток$, а амплитуда $A = 4\,часов$. Поэтому зависимость длительности дня от времени года можно записать в виде:

$$\tau(t) = A_0 + A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = A_0 + A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

где $A_0 = 12\,часов$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

1) Скорость изменения какой-либо величины есть производная от этой величины по времени. Поэтому для данной зависимости получаем

$$u \equiv \tau'(t) = \left(A_0 + A \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)' = A\omega \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right).$$

Максимальное значение скорости приращения длительности дня приходится на 22 марта ($\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = 1$) и равно $u_{\max} = A\omega = \dfrac{2\pi A}{T}$. Значит, за время $\Delta t = 1\,сутки$ длительность дня увеличится на

$$\Delta\tau_{\max} = u_{\max}\Delta t = \frac{2\pi A}{T} \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 60\,мин}{365\,суток} \cdot 1\,сутки = 4\,минуты \quad 8\,секунд$$

2) Если на Полярном круге есть моменты, когда длительность дня становится равной нулю или 24 часа, то это означает, что там амплитуда колебаний длительности дня равна $A_n = 12\,часов$. В этом случае максимальное увеличение длительности дня за сутки будет равным:

$$\Delta\tau_{\max n} = u_{\max}\Delta t = \frac{2\pi A_n}{T} \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 60\,мин}{365\,суток} \cdot 1\,сутки = 12\,минут \quad 23\,секунды$$

Ответ: 1) $\Delta\tau_{\max} = 4\,минуты$; 2) $\Delta\tau_{\max n} = 12\,минут$.